Es. 1: $\mathrm{Lie}(G\cap H)=\{X\in M_n(\mathbb{R}) \mid e^{tX}\in G\cap H \ \forall t\in\mathbb{R}\}=$

$=\{X \mid e^{tX}\in G \ \forall t\}\cap\{X \mid e^{tX}\in H \ \forall t\}=\mathrm{Lie}(G)\cap\mathrm{Lie}(H).$

Es. 2: Sia $A\in \mathrm{Lie}(U(n))$, allora $\overline{e^{sA}} = {}^t(e^{sA})^{-1} \quad \forall s\in\mathbb{R}$.

perché $e^{sA}\in U(n)$

cioè

$$e^{s\bar A} = e^{s(-{}^tA)} \qquad \forall s\in\mathbb{R}$$

$$(\bar A =)\ \frac{d}{dt} e^{s\bar A}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{s(-{}^tA)}\Big|_{t=0} \ (= -{}^tA)$$

da cui $\bar A = -{}^tA$, $\quad A\in \mathfrak{u}(n)$.

Viceversa: $A\in\mathfrak{u}(n) \Rightarrow \bar A = -{}^tA \Rightarrow e^{s\bar A} = e^{s(-{}^tA)} \quad \forall s\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \overline{e^{sA}} = {}^t(e^{sA})^{-1} \quad \forall s\in\mathbb{R} \Rightarrow A\in \mathrm{Lie}(U(n))$

Infine:

$$\mathrm{Lie}(SU(n)) = \mathrm{Lie}(U(n)\cap SL(n,\mathbb{C})) \overset{\text{esercizio 1}}{=} \mathrm{Lie}(U(n))\cap \mathrm{Lie}(SL(n,\mathbb{C})) =$$

$$= \mathfrak{u}(n)\cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(n).$$

Es. 3: 1) Base di $\mathfrak{su}(2)$ (come sp. vett. reale):

$${}^t\overline{\begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ e+if & g+ih \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a-ib & e-if \\ c-id & g-ih \end{pmatrix}$$ quindi se è in $\mathfrak{su}(2)$ dev'essere

$a=g=0$, $b=-h$, $c=-e$, $d=f$, cioè la matrice era

$$=\begin{pmatrix} ib & c+id \\ -c+if & -ib \end{pmatrix}$$ (cioè dev'essere simmetrica la parte immag., e antisimm. la parte reale).

base: $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$[A,B] = 2C$, $[B,C] = 2A$, $[C,A] = 2B$

Base di $so(3,\mathbb{R})$:

$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$[E,F] = -G$, $[F,G] = -E$, $[G,E] = -F$

Inoltre: $\left[\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right] = \frac{C}{2}$, $\left[\frac{B}{2}, \frac{C}{2}\right] = \frac{A}{2}$, $\left[\frac{C}{2}, \frac{A}{2}\right] = \frac{B}{2}$

$[E,F] = (-G)$, $[(-G), E] = F$, $[F, (-G)] = E$

Un isom. allora è dato da $A' = \frac{A}{2} \longmapsto E$, $B' = \frac{B}{2} \mapsto F$, $C' = \frac{C}{2} \mapsto -G$

ed estendendo per linearità.

Otteniamo $\varphi: su(2) \longrightarrow so(3)$ compatibile col bracket dei generatori.

Per bilinearità, φ è compatibile con tutti i bracket, ad es.

$$\varphi([A'+B', A'+C']) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bilinearità} \\ \text{di } [-,-]}}{=} \varphi([A',A'] + [A',C'] + [B',A'] + [B',C']) =$$

$$= \dots = [\varphi(A'+B'), \varphi(A'+C')].$$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SU(2)$, perché

$$^t\overline{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

ed essendo una matrice scalare, commuta con tutte le matrici di $SU(2)$.

Invece $SO(3)$ ha centro banale, infatti sia $X \in Z(SO(3))$.

Allora $XR = RX$ dove $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ = rotazione attorno all'asse z, di angolo $\frac{\pi}{2}$.

R ha un solo autospazio W di dim. 1 (W = l'asse $z = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Visto che $XR = RX$, <u>anche XW è un autospazio di R</u>

(dato $w \in W \setminus \{0\}$ abb. $R \cdot \underbrace{(Xw)}_{} = X \cdot (Rw) = \underbrace{Xw}_{}$)

segue che Xw è autovettore

cioè $XW = W$, e allora $X \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ Analogam. con altre rotazioni attorno agli assi x e y otteniamo $X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Con rotazioni attorno ad assi arbitrari otteniamo X matrice <u>scalare</u>, cioè $X \in \{I_3, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ha det.} = -1}}{-I_3}\}$.

<u>Esercizio 4</u>: Supp. $Lie(G) \subseteq Lie(H)$, allora

$$\exp(Lie(G)) \subseteq \exp(Lie(H)) (\subseteq H).$$ Ma $\exp(Lie(G))$ genera G perché G è connesso, quindi

$$G \subseteq H.$$

L'ultima affermazione dell'eserc. è ovvia.

<u>Es. 5:</u> 1) Sia $g \in G$, troviamo $X \in Lie(G)$ tale che $e^X = g$.

Visto che G è connesso, a lezione abb. visto che $\exp(Lie(G))$ genera G, cioè esistono $X_1, \ldots, X_m \in Lie(G)$ tali che

$$e^{X_1} \cdot \ldots \cdot e^{X_m} = g.$$

Ora, $Lie(G)$ è abeliana, per cui $e^{X_1} e^{X_2} = e^{X_1 + X_2}$, e similmente

$$e^{X_1} \cdot \ldots \cdot e^{X_m} = e^{X_1 + \ldots + X_m}$$

Quindi basta porre $X = X_1 + \ldots + X_m$.

2) Dati $g, h \in G$ scriviamo $g = e^X$, $h = e^Y$ con $X, Y \in Lie(G)$ grazie alla parte 1). Inoltre X, Y commutano, quindi

$$gh = e^X e^Y = e^{X+Y} = e^{Y+X} = e^Y \cdot e^X = hg$$

cioè G è abeliano.

Att.: <u>non</u> è vero in generale che $G \subseteq Span(Lie(G))$, e <u>neppure</u> $G \subseteq Span(Lie(G) \cup \{I_n\})$, es. $SO(3) \not\subseteq Span(so(3) \cup \{I_3\})$, es. $\exp\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in SO(3)$ ma $\notin Span(so(3) \cup \{I_3\})$.

<u>Es. 6:</u> 1) Supp. $\varphi(G) \subseteq H$, sia $X \in Lie(G)$ e verifichiamo che $d\varphi(X) \in Lie(H)$, cioè che $e^{t\, d\varphi(X)} \in H$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Abb.
$$e^{tX} \in G \quad \forall t \implies \varphi(e^{tX}) \in H \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\implies e^{t\, d\varphi(X)} \in H \quad \forall t \in \mathbb{R}$$ che è quello che volevamo.

2) Sia G connesso e $d\varphi(Lie(G)) \subseteq Lie(H)$.

allora dato $X \in Lie(G)$ abb.

$$\varphi(e^X) = e^{d\varphi(X)} \in H.$$

Sia ora $g \in G$ qualsiasi. Visto che G è connesso, poss. scrivere

$$g = e^{X_1} \cdots e^{X_m} \qquad \text{per certi elem. } X_1, \dots, X_m \in Lie(G).$$

Segue $\varphi(g) = \varphi(e^{X_1} \cdots e^{X_m}) = \underbrace{\varphi(e^{X_1})}_{\in H} \cdots \underbrace{\varphi(e^{X_m})}_{\in H} \in H.$

Es. 7: 1) $so(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\varphi} & S^1 \\ \uparrow \exp & & \uparrow \exp \\ \mathbb{R} & \xrightarrow[d\varphi]{} & \mathbb{R} \end{array}$$

$$\exp : \overset{\cong \mathbb{R}}{so(2,\mathbb{R})} \longrightarrow SO(2,\mathbb{R}) \cong S^1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \longmapsto e^A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Inoltre $\exp : so(2,\mathbb{R}) \longrightarrow SO(2,\mathbb{R})$ è suriettiva (perché $SO(2,\mathbb{R})$ è connesso abeliano, esercizio 5). Quindi dato $g \in SO(2,\mathbb{R})$ possiamo scriverlo come e^X per una $X \in Lie(G)$, e allora

$$\varphi(g) = \varphi(e^X) = e^{d\varphi(X)}$$

per cui φ è univocam. determinata da $d\varphi$.

2) abb. $d\varphi : so(2,\mathbb{R}) \longrightarrow so(2,\mathbb{R})$ è lineare, fra due sp. vett. di dimensione 1 (con base $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$).

Allora $d\varphi$ è un'omotetia, cioè è la moltipl. per uno scalare $r \in \mathbb{R}$:
$$d\varphi\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -r\alpha \\ r\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo solo descrivere quali omotetie $so(2,\mathbb{R}) \to so(2,\mathbb{R})$ sono il differenziale di qualche $\varphi: SO(2,\mathbb{R}) \to SO(2,\mathbb{R})$ omom. continuo.

Per farlo, supponiamo φ esiste, e notiamo

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}} = I_2 \quad , \text{ quindi } \quad \varphi\left(e^{\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}}\right) = I_2$$

ma $$\varphi\left(e^{\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}}\right) = e^{d\varphi\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 0 & -2\pi r \\ 2\pi r & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\pi r) & -\sin(2\pi r) \\ \sin(2\pi r) & \cos(2\pi r) \end{pmatrix} = I_2$$

da cui $r \in \mathbb{Z}$. Cioè solo le omotetie che moltiplicano per numeri <u>interi</u> possono venire da qualche $\varphi: SO(2,\mathbb{R}) \to SO(2,\mathbb{R})$.

Viceversa, sia $r \in \mathbb{Z}$ e consid. $\varphi_r : SO(2,\mathbb{R}) \to SO(2,\mathbb{R})$
$$g \longmapsto g^r$$

E' un omom. continuo, e vale

$$\varphi_r \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(r\alpha) & -\sin(r\alpha) \\ \sin(r\alpha) & \cos(r\alpha) \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene facilmente che $d\varphi_r$ è la moltiplicazione per r.

Allora $\{\text{omom. } \mathfrak{so}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{so}(2,\mathbb{R})\} \xleftrightarrow{1:1} \mathbb{R}$

$$\text{moltiplicaz. per } r \longleftarrow r$$

$$\{\text{omom. continui } SO(2,\mathbb{R}) \to SO(2,\mathbb{R})\} \xleftrightarrow{1:1} \mathbb{Z}$$

$$(g \mapsto g^r) \longleftarrow r$$

3) Basta consid. $\mathfrak{so}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ la moltiplicaz. per $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Es. 8: $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad Lie(G) = \{0\}$ $\quad (\subseteq M_2(\mathbb{R}))$

$V = \mathbb{R}^2$ ogni sottosp. vett. è $Lie(G)$-sottomodulo, ma

ad es. $W = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è G-sottomodulo, infatti

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in G} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W.$$

Es. 9: 1) Oss. che $\varphi(g): V \to V$ è lineare.
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad p \mapsto g\cdot p$

Infatti dati $g \in G$, $p, q \in V$, $\lambda \in k$, abb.

$g\cdot(p+q) = g\cdot p + g\cdot q$, $\quad g\cdot(\lambda p) = \lambda\,(g\cdot p)$

(es. $p = x^2 + x$, $q = 2x-1$, $p+q = (x^2+x)+(2x-1)$)

Inoltre $\varphi(g): V \to V$ è invertibile, per tornare da

$p(\underset{\uparrow}{x'}, \underset{\uparrow}{y'})$ a $p(x,y)$ basta usare g^{-1}.

trasformate usando g

Infine φ è omom. di gruppi, cioè $\varphi(h)\circ\varphi(g) = \varphi(hg)$,

cioè $\forall p \in V$: $\quad h\cdot(g\cdot p) = (hg)\cdot p$. Verifica:

$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} l & m \\ n & r \end{pmatrix} \quad\quad p(x,y) \in k[x,y]_d$

$$g\cdot p = p\,(ax+cy,\ bx+dy)$$

$$h\cdot(g\cdot p) = p\Big(a(lx+ny) + c\,(mx+ry),\ b\,(lx+ny) + d\,(mx+ry)\Big)$$

$$= p\Big((al+cm)x + (an+cr)y,\ (bl+dm)x + (bn+dr)y\Big) =$$

$$= (hg)\cdot p \quad\quad\quad hg = \begin{pmatrix} al+cm & bl+dm \\ an+cr & bn+dr \end{pmatrix}$$

2) Calcoliamo $d\varphi(\underset{\mathfrak{sl}(2)}{\underset{\cap}{e}})$. Dalla def. di $d\varphi$ sappiamo

$$\exp(d\varphi(e)) = \varphi(\exp(e))$$

Come ricostruire $d\varphi(e)$? Con la derivata:

$$d\varphi(e) = \frac{d}{dt}\exp(d\varphi(te))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi(\exp(te))\Big|_{t=0}$$

Dato $p \in V$, abb. $d\varphi(e)p = \frac{d}{dt}\varphi(\exp(te))p\Big|_{t=0}$

Ora: $\exp(te) = \exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vediamo cosa fa $\varphi(\exp(te))$ su una base di V: $(x^d, x^{d-1}y, \dots, \underset{\underset{a+b=d}{\uparrow}}{x^a y^b}, \dots, y^d)$

$\varphi\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}x^d = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x^d = x^d$ der. in $t=0$: $= 0 = d\varphi(e)(x^d)$

$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x^{d-1}y = x^{d-1}(tx+y)$ — " — $= x^d = d\varphi(e)(x^{d-1}y)$

$\vdots$

$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x^a y^b = x^a(tx+y)^b$

(vale anche per $b=0$)

$\frac{d}{dt}(-) = x^a \cdot b(tx+y)^{b-1} \cdot x$, in $t=0$: $bx^{a+1}y^{b-1} = d\varphi(e)(x^a y^b)$

Analogam. $d\varphi(f)(x^a y^b) = a x^{a-1} y^{b+1}$

$d\varphi(h)(x^a y^b) = (a-b)x^a y^b$,

$\exp(th) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ $\varphi(\exp(th))(x^a y^b) = (e^t x)^a (e^{-t} y)^b$

$$\frac{d}{dt}(-) = a\left(e^{t}x\right)^{a-1} \cdot e^{t}x\left(e^{-t}y\right)^{b} + \left(e^{t}x\right)^{a} b\left(e^{-t}y\right)^{b-1}\left(-e^{-t}y\right)$$

$$(-)\Big|_{t=0} = a x^{a-1} \cdot x y^{b} - b x^{a} y^{b-1} \cdot y = (a-b)\, x^{a} y^{b}$$

Quindi la base scelta è una base di autovett. di $d\varphi(h)$, con autovalori $d, d-2, d-4, \ldots, -d+2, -d$.

A meno della moltipl. per scalari, abb.:

$$\begin{tikzcd}
0 & x^{d} \arrow[l, "e"'] \arrow[loop below, "h"] \arrow[r, bend right, "f"'] & x^{d-1}y \arrow[l, bend right, "e"'] \arrow[loop below, "h"] \arrow[r, bend right, "f"'] & x^{d-2}y^{2} \arrow[l, bend right, "e"'] \arrow[loop below, "h"] \arrow[r, bend right, "f"'] & x^{d-3}y^{3} \arrow[l, bend right, "e"'] \arrow[loop below, "h"] & \cdots & x y^{d-1} \arrow[loop below, "h"] \arrow[r, bend right, "f"'] & y^{d} \arrow[l, bend right, "e"'] \arrow[loop below, "h"] \arrow[r, bend right, "f"'] & 0
\end{tikzcd}$$

3) Sia $W \subseteq V$ $\mathfrak{sl}(2)$-sottomodulo, supp. $W \neq \{0\}$.

Sia $p = c_d x^{d} + c_{d-1} x^{d-1} y + \ldots + c_0 y^{d} \in W$, $p \neq 0$.

Sia m il massimo tale che $c_d \neq 0$, cioè

$$p = \underset{\neq 0}{c_m}\, x^{m} y^{d-m} + \ldots + c_0 y^{d}$$

Allora $f.p = d\varphi(f)(p) = c_m\, m\, x^{m-1} y^{d-m+1} + \ldots \in W$

$f.(f.p) = c_m\, m \cdot (m-1)\, x^{m-2} y^{d-m+2} + \ldots \in W$

quindi $\underbrace{f.(f.\ldots.(f.p)\ldots)}_{m \text{ volte}} = \underbrace{c_m\, m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}_{\neq 0} \cdot y^{d}$

cioè $y^{d} \in W$. Applichiamo e tante volte:

$\left.\begin{array}{ll} e.\ y^d = d\cdot x y^{d-1} \Rightarrow x y^{d-1} \in W \\ e.\ x y^{d-1} = (d-1)\, x^2 y^{d-2} \Rightarrow x^2 y^{d-2} \in W \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad \Rightarrow x^d \in W \end{array}\right\} \Rightarrow W = V.$ Oss. infine che $V \neq \{0\}$, quindi V è irriducibile.

Es. 10: $\alpha(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$ $\beta(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix}$

$$\alpha(t)\beta(t) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \qquad c_{ij}(t) = \sum_{m=1}^{n} a_{im}(t)\, b_{mj}(t)$$

$\frac{d}{dt}\big(\alpha(t)\beta(t)\big)$ ha entrata i,j uguale a $c'_{ij}(t)$, e abb.

$$c'_{ij}(t) = \sum_{m=1}^{n} a'_{im}(t)\, b_{mj}(t) + a_{im}(t)\, b'_{mj}(t)$$

$\alpha'(t)\beta(t) + \alpha(t)\beta'(t)$ ha entrata i,j uguale a

$$\left(\sum_{m=1}^{n} a'_{im}(t)\, b_{mj}(t)\right) + \left(\sum_{m=1}^{n} a_{im}(t)\, b'_{mj}(t)\right)$$

uguali!

Sia ora $v = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, allora $\alpha(t)v = \begin{pmatrix} a_{11}(t)c_1 + \dots + a_{1n}(t)c_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)c_1 + \dots + a_{nn}(t)c_n \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{dt}\big(\alpha(t)v\big) = \begin{pmatrix} a'_{11}(t)c_1 + \dots + a'_{1n}(t)c_n \\ \vdots \\ a'_{n1}(t)c_1 + \dots + a'_{nn}(t)c_n \end{pmatrix} = \alpha'(t)\cdot v$$